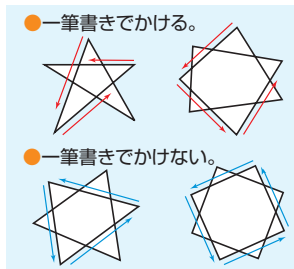


5

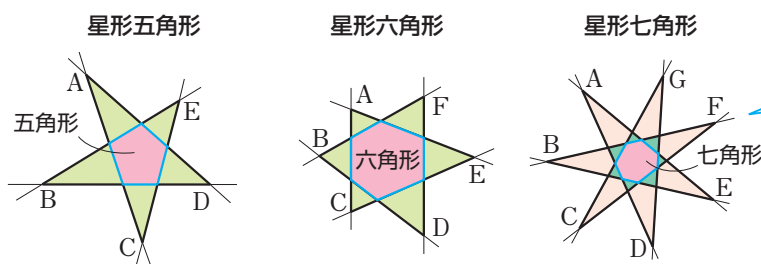
星形の角の和の求め方

星形の角の和には、どんなしくみがかくされているのか調べてみましょう。
また、星形五角形や星形七角形は一筆書きでかけますが、星形六角形や星形八角形ときには一筆でかけない場合があります。星形が一筆書きでかけるのはどんな条件のときか、調べてみましょう。



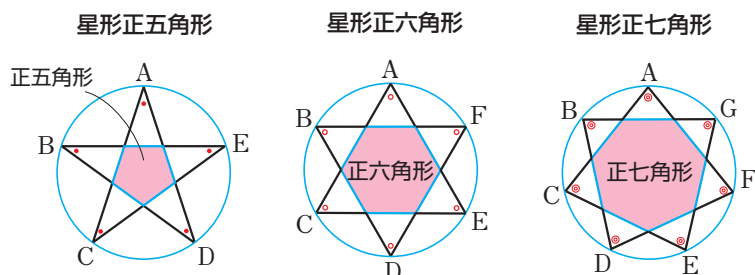
1 星形多角形

下の図のように、多角形の各辺を延長していくと、何回か交わったあとと交わらなくなります。このときにできる図形を星形多角形といいます。星形多角形は1つだけできるとは限りません。



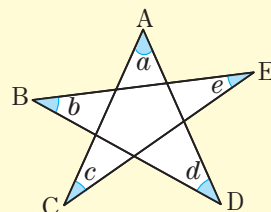
星形が2つできる。

正多角形からできた星形を星形正多角形といいます。
また、星形正 n 角形の n 個の内角はそれぞれ等しくなります。



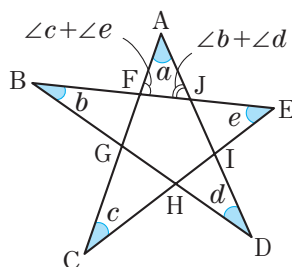
星形多角形の内角

星形多角形の内角とは、多角形の各辺の延長線でつくられた、鋭角のみをいいます。



$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e$ を星形五角形の内角の和といいます。

2 星形五角形の角の和を求めよう ($\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e$)



◎ 1つの三角形に5つの角を集めることができる。

$\triangle AFJ$ において、 $\angle AFJ = \angle c + \angle e$

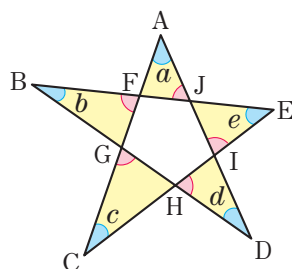
$\angle AJF = \angle b + \angle d$

したがって、 $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e$

$= \angle a + \angle AFJ + \angle AJF = 180^\circ$

三角形の外角は、それととなり合わない2つの内角の和に等しい。

$\triangle AFJ$ の内角の和



〔別解〕 星形五角形を、内側の五角形の各辺を延長してできた図形と考える。

内側の五角形のまわりにできた5つの三角形の内角の和の合計は

$180^\circ \times 5 = 900^\circ$

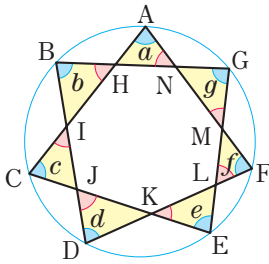
また、五角形FGHIJの外角の和は 360° だから、

$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e$

$= 900^\circ - 360^\circ \times 2 = 180^\circ$

三角形の内角の和は、 180°

③ 星形七角形の角の和を求めよう ($\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e + \angle f + \angle g$)



◎星形七角形を、内側の七角形の各辺を延長してできた図形と考える。

内側の七角形のまわりにできた7つの三角形の内角の和の合計は、

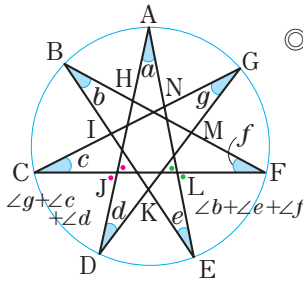
$$180^\circ \times 7 = 1260^\circ$$

三角形の内角の和は、
 180°

また、七角形HIJKLMNの外角の和は 360° だから、

$$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e + \angle f + \angle g = 1260^\circ - 360^\circ \times 2 = 540^\circ$$

➡ 点の結び方を変えると、星形の角の和はどうなるだろうか？



◎ 7つの点をAを起点として、3番目ごとに結んでできた星形七角形の角の和を考える。

3つの角を、1つに集める方法を使う。(→自由研究4)

$$\angle b + \angle e + \angle f = \angle ELF = \angle JLA \text{ (対頂角)}$$

$$\angle g + \angle c + \angle d = \angle CJD = \angle AJL \text{ (対頂角)}$$

$$\angle a + \angle JLA + \angle AJL = 180^\circ$$

$$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e + \angle f + \angle g = 180^\circ$$

点の結び方を変えると、
星形の角の和は
ちがってくる。

△AJLの内角の和

④ 星形 n 角形の角の和

円周上に n 個の点を取り1つの点から出発して、2番目ごと、3番目ごと、……、 p 番目ごとに結んでできる星形 n 角形の角の和を求めてみよう。

1番目ごとに結びと、ふつうの多角形になるから、
 n 角形の内角の和は、
 $180^\circ \times (n - 2)$
 $= 180^\circ \times n - 360^\circ$

➡ 星形の角の和を求める公式を調べると、

点の結び方	星形五角形	星形六角形	星形七角形	星形八角形	星形九角形	星形十角形	角の和の公式
1番目ごと (多角形)	 540°	 720°	 900°	 1080°	 1260°	 1440°	単位：度 (°) $180n - 360 \times 1$ $= 180(n - 2)$
2番目ごと	 180°	 360°	 540°	 720°	 900°	 1080°	$180n - 360 \times 2$ $= 180(n - 4)$
3番目ごと	2番目ごとに結んだ星形五角形と同じになる。	かくことができない。	 180°	 360°	 540°	 720°	$180n - 360 \times 3$ $= 180(n - 6)$
4番目ごと	1番目ごとに結んだ五角形と同じになる。	2番目ごとに結んだ星形六角形と同じになる。	3番目ごとに結んだ星形七角形と同じになる。	かくことができない。	 180°	 360°	$180n - 360 \times 4$ $= 180(n - 8)$

p 番目ごと	➡ p 番目ごとに結んだ星形 n 角形は、$(n - p)$ 番目ごとに結んでつくった星形 n 角形と同じ形になるので、n と p の関係は、$1 < p < \frac{n}{2}$ (n, p は自然数) ① $\frac{n}{p}$ が約分できない分数になるときは、星形 n 角形は一筆書きでかける。 ② $\frac{n}{p}$ が約分できる分数になるときは、一筆書きでかけない。	$180n - 360 \times p$ $= 180(n - 2p)$
----------	--	--